Hallの定理の一般化 (有限群とその表現,頂点作用素代数,代数的組合せ論の研究)

数理解析研究所講究録
第 1872 巻 2014 年 183-190

Hallの定理の一般化
(Generalization of a theorem of P. Hall)

熊本大学大学院自然科学研究科　千吉良直紀
Department of Mathematical Sciences,
Kumamoto University

本研究は淺井恒信氏（近畿大学)、庭崎隆氏（愛媛大学)、竹ヶ原裕元氏（室蘭工業大学）との共同研究である。詳細は [1] を参照されたい。

1 Introduction

P. Hall の定理といってもたくさんあるが、ここでいう P. Hall の定理とは

> P. Hall,
> On a theorem of Frobenius,
> Proc. London Math. Soc. **40** (1936) 468–501

にある定理のことである。まずは記号の準備をしておく。

A, G を有限群とし、A は G に作用するとする。半直積 $AG = A \ltimes G$ を考える[1]。$a \in A$ に対して

$$M_n(G, a) = \{x \in G \mid (ax)^n = 1\}$$

とおく。

$$(ax)^n = a^n \cdot x^{a^{n-1}} \cdots x^{a^2} \cdot x^a \cdot x$$

であり、$A \cap G = 1$ であることから、

$$M_n(G, a) \neq \emptyset \iff a^n = 1$$

であることがわかる。したがって $a^n = 1$ であるとき、

$$M_n(G, a) = \{x \in G \mid x^{a^{n-1}} \cdots x^{a^2} \cdot x^a \cdot x = 1\}$$

である。

[1] AG の中では、$x \in G$, $a \in A$ に対して $x^a = a^{-1}xa$ である。

Theorem (P. Hall, a special case of Theorem 1.7). *Let χ be a $\mathbb{C}$-character of AG. Then for any $a \in A$,*

$$\frac{1}{\gcd(n, |G|)} \sum_{x \in M_n(G,a)} \chi(ax)$$

is an algebraic integer.

Remark 1. なぜこの「特別な場合」の話に注目するかについて述べる。

- 上の定理で $\chi = 1_{AG}$ とすると、$a^n = 1$ ならば

$$|M_n(G,a)| = \sharp\{x \in G \mid x^{a^{n-1}} \cdots x^{a^2} \cdot x^a \cdot x = 1\} \equiv 0 \pmod{\gcd(n, |G|)}$$

  となる。これは P. Hall, Theorem 1.6 に相当する。

- 上の定理で、A が G に自明に作用する場合を考えると、

$$M_n(G,a) = \{x \in G \mid x^n = 1\}$$

  となる。$a = 1$ の時を考えると、

$$\frac{1}{\gcd(n, |G|)} \sum_{x \in \{x \in G \mid x^n = 1\}} \chi(x)$$

  が algebraic integer ということになる。これは Frobenius の定理で、実際にはもっと強いことがいえて、この値は整数になることが知られている。

- さらに $\chi = 1_G$ にすれば、よく知られた Frobenius の定理

$$\sharp\{x \in G \mid x^n = 1\} \equiv 0 \pmod{(n, |G|)}$$

  が得られる。 □

A が G に作用しているので、その作用を ρ とする。すなわち、$\rho : A \to \mathrm{Aut}(G)$ なる準同型を考える。$a \in A$, $x \in G$ に対して、$x^{\rho(a)}$ を単に x^a と書くことにする。$Z_\rho(A,G)$ で A から G への crossed homomorphism 全体の集合を表すことにする。ここで、$\varphi : A \to G$ が crossed homomorphism（斜準同型）であるとは、

$$\varphi(ab) = \varphi(a)^b \varphi(b) \quad \text{for any } a, b \in A$$

が成り立つ時をいう。$A = \langle a \rangle$ が位数 n であるとき、

$$\begin{array}{ccc} Z_\rho(A,G) & \longrightarrow & M_n(G,a) \\ \Psi & & \Psi \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(a) \end{array}$$

が 1 対 1 対応になる。そこで、P. Hall の定理を crossed homomorphism に書き換えてやると証明の見通しがよくなって証明が簡潔になる。まずはその話をする。

2 Known results

本題に入る前にこれまでに知られていることをまとめておく。

Theorem (Asai-Yoshida (1993)). $|Z_\rho(A,G)| \equiv 0 \pmod{\gcd(|A/A' : \Phi(A/A')|, |G|)}$.

Conjecture (Asai-Yoshida). $|Z_\rho(A,G)| \equiv 0 \pmod{|A/A'|, |G|}$.

次の場合は正しいことが示されている。

- both A and G are abelian.
- $A = Z_{p^e} \times Z_p \times \cdots \times Z_p$.
- $p > 2$, $A = Z_{p^e} \times Z_{p^2} \times Z_p \times \cdots \times Z_p$.

その他にも特別な場合で成立することが確かめられているものがある。詳しくは、竹ヶ原裕元氏の報告 [3] などを参照されたい。

3 Crossed homomorphisms

$H \subseteq G$ をとる。この H を使って $Z_\rho(A,G)$ を分割することを考える。$\varphi \in Z_\rho(A,G)$ に対して、

$$\mathcal{X}_H(\varphi) = \{\psi \in Z_\rho(A,G) \mid \psi(a)H = \varphi(a)H \quad \text{for any } a \in A\}$$

とおく。

Lemma 1. $\mathcal{X}_H(\varphi) = \mathcal{X}_H(\varphi') \iff \mathcal{X}_H(\varphi) \cap \mathcal{X}_H(\varphi') \neq \emptyset$.

$$\Omega_H = \{\mathcal{X}_H(\varphi) \mid \varphi \in Z_\rho(A,G)\}$$

とおくと、上の補題から

$$Z_\rho(A,G) = \bigcup_{X \in \Omega_H} X$$

という disjoint union になる。

次に crossed homomorphism の共役を考える。$\varphi \in Z_\rho(A,G)$ と $g \in G$ に対して、

$$\varphi^g(a) = (g^a)^{-1}\varphi(a)g$$

と定めると、$\varphi^g \in Z_\rho(A,G)$ となる[2]。

Lemma 2. $\mathcal{X}_H(\varphi^h) = \{\psi^h \mid \psi \in \mathcal{X}_H(\varphi)\}$ *for* $h \in H$.

---

[2] この共役は鈴木 [2, p.240] にある。

この補題により、H が Ω_H に作用することになる。$\mathcal{X}_H(\varphi)$ の固定部分群を $\widetilde{H}_\varphi$ とおく。すなわち、

$$\widetilde{H}_\varphi = \{h \in H \mid \mathcal{X}_H(\varphi^h) = \mathcal{X}_H(\varphi)\}$$

とする。

Lemma 3. *The following hold.*

(1) $\widetilde{H}_\varphi = \bigcap_{a \in A} H^{a\varphi(a)}$.

(2) $\mathcal{X}_H(\varphi) = \mathcal{X}_{\widetilde{H}_\varphi}(\varphi)$.

また、$\psi \in \mathcal{X}_{\widetilde{H}_\varphi}(\varphi)$ とすると、任意の $a \in A$ に対して、$\varphi(a)^{-1}\psi(a) \in \widetilde{H}_\varphi$ であるが、$a, b \in A$ に対して、

$$\begin{aligned}\varphi(ab)^{-1}\psi(ab) &= (\varphi(a)^b\varphi(b))^{-1}\psi(a)^b\psi(b)\\ &= \varphi(b)^{-1}b^{-1}\varphi(a)^{-1}b \cdot b^{-1}\psi(a)b\psi(b)\\ &= (\varphi(a)^{-1}\psi(a))^{b\varphi(b)}\varphi(b)^{-1}\psi(b)\end{aligned}$$

となるので、

$$\varphi^{-1}\psi \in Z_{\rho\varphi}(A, \widetilde{H}_\varphi)$$

であることがわかる。ここで、

$$\widetilde{A}_\varphi := \{a\varphi(a) \mid a \in A\} \cong A$$

であることに注意しておく。このことから、

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{\widetilde{H}_\varphi}(\varphi) & \longrightarrow & Z_{\rho\varphi}(A, \widetilde{H}_\varphi) \\ \Psi & & \Psi \\ \psi & \longmapsto & \varphi^{-1}\psi \end{array}$$

が1対1対応であることがわかる。したがって

$$\mathcal{Y}_H(\varphi) = \bigcup_{h \in H} \mathcal{X}_H(\varphi)^h$$

とおくと、次のことがわかる。

Lemma 4. $|\mathcal{Y}_H(\varphi)| = |H : \widetilde{H}_\varphi| \times |Z_{\rho\varphi}(A, \widetilde{H}_\varphi)|$.

もちろん、$Z_\rho(A, G)$ は $\mathcal{Y}_H(\varphi)$ 達の disjoint union である。そこで、もし、

$$|Z_{\rho\varphi}(A, \widetilde{H}_\varphi)| \equiv 0 \pmod{|\widetilde{H}_\varphi|}$$

がいつでも成り立つことがいえれば、

$$|Z_\rho(A, G)| \equiv 0 \pmod{|H|}$$

ということになる。

4 A が cyclic の場合

さて、$A = \langle a \rangle$ の場合について述べる。

Lemma 5. *Suppose that A is cyclic and G is a p-group. If $|G|$ divides $|A|$, then $|Z_\rho(A,G)| = |G|$.*

Theorem . *If A is cyclic, then*

$$|Z_\rho(A,G)| \equiv 0 \pmod{\gcd(|A|,|G|)}.$$

Proof. H として G の部分群で位数が $\gcd(|A|,|G|)$ を割り切る p の最高冪であるようなものをとる。Lemma 5 より $\varphi \in Z_\rho(A,G)$ に対して、$|Z_\rho(A,H_\varphi)| = |H_\varphi|$ となるので、Lemma 4 より

$$|\mathcal{Y}_H(\varphi)| = |H|$$

がいえるので、定理が成り立つことがわかる。 □

Theorem . *Let χ be a $\mathbb{C}$-character of AG. Then*

$$\frac{1}{\gcd(|A|,|G|)} \sum_{\varphi \in Z_\rho(A,G)} \chi(a\varphi(a))$$

is an algebraic integer.

Proof. H として G の部分群で位数が $\gcd(|A|,|G|)$ を割り切る p の最高冪であるようなものをとる。

$$\sum_{\varphi \in Z_\rho(A,G)} \chi(a\varphi(a)) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{\varphi \in \mathcal{Y}_H(\varphi_i)} \chi(a\varphi(a))$$

なので、

$$\sum_{\psi \in \mathcal{Y}_H(\varphi)} \chi(a\psi(a))$$

の部分を考える。

$$\begin{aligned}\sum_{\psi \in \mathcal{Y}_H(\varphi)} \chi(a\psi(a)) &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\psi \in \mathcal{X}_H(\varphi^{h_j})} \chi(a\psi(a)) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\psi \in \mathcal{X}_H(\varphi)} \chi(a\psi^{h_j}(a))\end{aligned}$$

ここで、

$$a\psi^{h_j}(a) = (a\psi(a))^{h_j}$$

であるから

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{\psi\in\mathcal{X}_H(\varphi)}\chi(a\psi^{h_j}(a))=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\psi\in\mathcal{X}_H(\varphi)}\chi(a\psi(a))$$
$$=|H:\widetilde{H}_\varphi|\times\sum_{\psi\in\mathcal{X}_H(\varphi)}\chi(a\psi(a))$$

となる。さらに

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{X}_H(\varphi) & \longrightarrow & Z_{\rho\varphi}(A,\widetilde{H}_\varphi)\\ \Psi & & \Psi\\ \psi & \longmapsto & \varphi^{-1}\psi\end{array}$$

が1対1対応であり、A が cyclic で $\widetilde{H}_\varphi$ は p-group で $|\widetilde{H}_\varphi|$ が $|A|$ を割るので、

$$Z_{\rho\varphi}(A,\widetilde{H}_\varphi)=\{a\mapsto x\mid x\in\widetilde{H}_\varphi\}$$

となる。したがって各 $x\in\widetilde{H}_\varphi$ に対して、

$$\varphi(a)^{-1}\psi(a)=x$$

となる ψ があることになる。したがって

$$\sum_{\psi\in\mathcal{X}_H(\varphi)}\chi(a\psi(a))=\sum_{x\in\widetilde{H}_\varphi}\chi(a\varphi(a)x)$$

となる。$\widetilde{A}_\varphi\widetilde{H}_\varphi$ で考えると、

$$\frac{1}{|\widetilde{H}_\varphi|}\sum_{x\in\widetilde{H}_\varphi}\chi(a\varphi(a)x)$$

は algebraic integer ある。以上によってもともとのものが algebraic integer であることがわかる。 □

最後の algebraic integer であることは次のことからわかる。

Lemma 6. *Suppose that* $N\lhd G$. *For a* $\mathbb{C}$*-character* χ *of* G, *set*

$$\Phi(z)=\frac{1}{|N|}\sum_{x\in N}\chi(zx).$$

Then

$$\Phi=\sum_{\xi\in\{\xi\in Irr(G)|N\subseteq Ker\xi\}}(\chi,\xi)\xi.$$

5 Generalization

$B \lhd A$ とする。$\kappa \in Z_\rho(B,G)$ に対して

$$Z_\rho(A,G;B,\kappa) = \{\varphi \in Z_\rho(A,G) \mid \varphi|_B = \kappa\}$$

とおく。$\varphi,\psi \in Z_\rho(A,G;B,\kappa)$ に対して $\widetilde{B}_\kappa \lhd \widetilde{A}_\varphi$, $\widetilde{B}_\kappa \lhd \widetilde{A}_\psi$ なので、

$$\varphi(a)^{-1}\psi(a) \in N_{AG}(\widetilde{B}_\kappa) \cap G = C_G(\widetilde{B}_\kappa)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(ab)\psi(ab) &= (\varphi(ab))^{-1}\psi(ab) = (\varphi(a)^b\varphi(b))^{-1}\psi(a)^b\psi(b) \\
&= \varphi(b)^{-1}b^{-1}\varphi(a)^{-1}b \cdot b^{-1}\psi(a)b\psi(b) \\
&= (\varphi(a)^{-1}\psi(a))^{b\varphi(b)}\varphi(b)^{-1}\psi(b) \\
&= \varphi(a)^{-1}\psi(a)
\end{aligned}$$

となるので、A/B 上で well-defined となって、

$$\begin{array}{ccc}
Z_\rho(A,G;B,\kappa) & \longrightarrow & Z_{\overline{\rho\varphi}}(A/B, C_G(\widetilde{B}_\kappa)) \\
\Psi & & \Psi \\
\psi & \longmapsto & \varphi^{-1}\psi
\end{array}$$

という 1 対 1 対応が出来る。

Theorem . *Suppose that $B \lhd A$ with A/B cyclic, say $A/B = \langle aB\rangle$. Let χ be a $\mathbb{C}$-character of AG such that $\langle \widetilde{B}_\psi \mid \psi \in Z_\rho(A,G)\rangle \subseteq Ker\chi$. Then*

$$\frac{1}{\gcd(|A/B|,|G|)} \sum_{\psi\in Z_\rho(A,G)} \chi(a\psi(a))$$

is an algebraic integer.

Proof.

$$\sum_{\psi\in Z_\rho(A,G)} \chi(a\psi(a)) = \sum_{\kappa\in Z_\rho(B,G)} \sum_{\psi\in Z_\rho(A,G;B,\kappa)} \chi(a\psi(a))$$

である。$\varphi \in Z_\rho(A,G;B,\kappa)$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{\psi\in Z_\rho(A,G;B,\kappa)} \chi(a\psi(a)) &= \sum_{\psi\in Z_\rho(A,G;B,\kappa)} \chi(a\varphi(a)(\varphi^{-1}\psi)(a)) \\
&= \sum_{\zeta\in Z_{\overline{\rho\varphi}}(A/B,C_G(\widetilde{B}_\kappa))} \chi(a\varphi(a)\zeta(aB))
\end{aligned}$$

ここで、$\widetilde{B}_\kappa \subseteq Ker\chi$ であることから、χ は $\widetilde{A}_\varphi/\widetilde{B}_\kappa C_G(\widetilde{B}_\kappa)$ の指標と思うことができる。したがって、すでに示したように

$$\frac{1}{\gcd(|A/B|, |G_\kappa|)} \sum_{\psi \in Z_\rho(A,G;B,\kappa)} \chi(a\psi(a))$$

は algebraic integer になる。さらに G の元で κ の共役をとることを考える。

$$Z_\rho(A,G;B,\kappa^g) = \{\psi^g \mid \psi \in Z_\rho(A,G;B,\kappa)\}$$

となる。

$$\kappa = \kappa^g \iff g \in C_G(\widetilde{B}_\kappa)$$

であるから、$G/C_G(\widetilde{B}_\kappa)$ の代表元を $\{g_1, \cdots, g_\ell\}$ とすれば、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\gcd(|A/B|, |G|)} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{\psi \in Z_\rho(A,G;B,\kappa^{g_i})} \chi(a\psi(a)) \\
&= \frac{1}{\gcd(|A/B|, |G|)} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{\psi \in Z_\rho(A,G;B,\kappa)} \chi(a\psi^{g_i}(a)) \\
&= \frac{1}{\gcd(|A/B|, |G|)} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{\psi \in Z_\rho(A,G;B,\kappa)} \chi(a\psi(a)) \\
&= \frac{|G|}{|C_G(\widetilde{B}_\kappa)|} \times \frac{\gcd(|A/B|, |C_G(\widetilde{B}_\kappa)|)}{\gcd(|A/B|, |G|)} \times \frac{1}{\gcd(|A/B|, |C_G(\widetilde{B}_\kappa)|)} \sum_{\psi \in Z_\rho(A,G;B,\kappa)} \chi(a\psi(a))
\end{aligned}$$

となってこれが algebraic integer となることがわかる。 □

Corollary 1. *Suppose that $B \triangleleft A$ with A/B cyclic. Then* $|Z_\rho(A,G)| \equiv 0 \pmod{|A/B|, |G|}$.

Corollary 2. $|Z_\rho(A,G)| \equiv 0 \pmod{\exp(A/A'), |G|}$.

参考文献

[1] T. Asai, N. Chigira, T. Niwasaki and Y. Takegahara, On a theorem of P. Hall, J. Group Theory **16** (2013) 69–80.

[2] 鈴木通夫「群論，上」岩波書店, 1977.

[3] 竹ケ原裕元、On P. Hall's relations in finite groups II, 数理研講究録 **1407** (2004) 63–70.